DT: 519.866; 338.23:336.74
klíčová slova: stavový popis – maximální věrohodnost – Kalmanův filtr

Odhad parametrů modelů ve stavovém tvaru

Jan VLČEK*

Úvod

Analýza monetární politiky, stejně jako rozbor vlivu monetárních zásahů do ekonomiky jsou v poslední době ve stále větší míře realizovány prostřednictvím strukturálních modelů. Modelový rámec představuje sjednocující prvek, o který se mohou opírat naše úvahy a který zajišťuje jejich konzistenci. Monetární modely, které se nesnaží ani tak o precizní popis systému jako spíše o zachycení hlavních charakteristik jeho chování s důrazem na klíčové kanály monetární transmise, dovolují nejenom ex post simulaci celého ekonomického systému, ale umožňují i tvorbu předpovědí. Monetární autorita tak může anticipovat důsledky a vlivy svých monetárních opatření na budoucí chování a vývoj ekonomiky. To je důležité zejména v režimu cílování inflace; Česká národní banka na tento režim přešla v roce 1998. V tomto rámci se predikce inflace stává klíčovým prvkem měnové politiky; to klade kvalitativně vyšší nároky nejen na proces tvorby měnové politiky, ale především na analytické prostředí, v němž se tvorba měnové politiky odehrává.

Tranzitivnost české ekonomiky, jež je příčinou časté nekonzistentnosti a krátkosti časových řad, spolu s využitím rovnovážných modelů s nepozorovatelnými veličinami vedou ke specifickým požadavkům na odhadové a identifikační metody. Z těchto důvodů je vhodné model přepsat do stavového tvaru a k odhadu využít Kalmanův filtr. Odhadová procedura Kalmanova filtru je však značně citlivá na apriorní odhad počátečních stavů a předpokládá znalost modelových parametrů. K odhadu parametrů a počátečních stavů lze využít klasické ekonometrické postupy. Ty jsou však málo robustní z hlediska modelové struktury. Tento text stručně shrnuje možnosti apriorního odhadu modelů ve stavovém tvaru, s jejich výhodami a omezeními. Podrobněji je zde zmiňována metoda maximální věrohodnosti, používaná v technické praxi. Hlavní výhodou je zejména její robustnost z hlediska modelové struktury.

Struktura textu je následující. První část se zabývá problematikou odhadu počátečních podmínek pro parametry modelů s časově proměnnými

* Česká národní banka, Praha (jan.vlcek@cnb.cz)
Názory a pohledy prezentované autorem v textu jsou jeho vlastní, a tedy nemusejí nutně odpovídat stanoviskům ČNB. Stejně tak omyly a chyby jsou pouze autorovy.
Autor děkuje Osvaldu Vašíčkovi z ESF MU za cenné připomínky a náměty.

parametry, tj. odhadu modelu ve stavovém tvaru. Druhá část v krátkosti popisuje jednu z možností odhadu parametrů metodou maximální věrohodnosti na základě výsledků Kalmanova filtru spolu s výhodami a nevýhodami uvedené metody. V poslední části je prezentován příklad odhadu malého monetárního modelu s adaptivními očekáváními na českých datech.

Stavový popis, odhad parametrů a počátečních stavů

Krátkost a nekonzistence dostupných časových řad spolu s využitím modelů, v nichž vystupují nepozorovatelné veličiny, vedou ke specifickým požadavkům na metody odhadu. Odhadový algoritmus by měl být schopen pracovat s nepozorovatelnými veličinami a měl by dokázat tyto veličiny identifikovat. Dále by metoda měla poskytovat možnost specifikace nelineární modelové struktury a umožňovat odhad v čase proměnných parametrů. Vzhledem k těmto požadavkům je vhodné použít stavový popis modelů a bayesovský přístup k popisu neurčitosti.[1]

Uvažujme ekonomický systém skládající se z velkého množství racionálně jednajících subjektů. Pokud chceme zkoumat jeho vlastnosti a chování, je nutná jeho agregace a určitá míra abstrakce, kdy chování celého systému popíšeme prostřednictvím několika rovnic chování. Bez újmy na obecnosti lze systém rovnic chování zapsat v maticovém tvaru:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{F}\mathbf{y}_t + \sum_{i=1}^{p} \mathbf{G}_i \mathbf{y}_{t-i} + \sum_{j=1}^{q-1} \mathbf{H}_j \mathbf{u}_{t-j+1} \tag{1}$$

kde $\mathbf{y}$ je vektor výstupních veličin v daném čase, $\mathbf{u}$ je vektor vstupů a $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ a $\mathbf{H}$ jsou matice parametrů. V klasickém pojetí se jedná o vnější popis, kdy jsou všechny proměnné pozorovatelné a sledujeme chování systému na základě minulých výstupů a vstupů.

Vzhledem k výše zmiňovaným požadavkům obecnější je vnitřní popis systému neboli stavová teorie dynamických systémů – viz např. (Štecha – Havlena, 1993). Ekonomiku tak chápeme jako dynamický systém, do kterého vstupují pozorovatelné vstupy (exogenní faktory) $\mathbf{u}$ a pozorujeme výstupy $\mathbf{y}$. V každém časovém okamžiku je systém navíc charakterizován nepozorovatelnou veličinou $\mathbf{x}$, která je stavovým vektorem. Stav systému spolu se vstupem určuje jeho chování do budoucnosti. Obecně lze systém ve stavovém tvaru zapsat:

$$\mathbf{x}_{t+1} = g\,(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, v_t) \tag{2}$$

$$\mathbf{y}_\mathrm{t} = f\,(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, w_t) \tag{3}$$

kde v a w jsou šumy. Dále se předpokládá, že je zadán vektor počáteční stavů $\mathbf{x}_0$. Při znalosti funkcí f a g a na základě znalosti počátečního stavu

[1] Bayesovský přístup používá pojem pravděpodobnost ke kvantitativnímu popisu neurčitosti. Pojem náhodný je chápán jako neurčitý a hustota pravděpodobnosti jako subjektivní míra důvěry racionálně jednající osoby k hodnotě parametru.

jsme schopni s využitím minulého vývoje vstupů a výstupů zkonstruovat optimální odhad stavů pomocí algoritmu Kalmanova filtru (dále jen KF). Jednotlivé popisy systému, vnitřní a vnější, jsou vzájemně převoditelné a ekvivalentní. Výhodou vnitřního popisu daného rovnicemi (2) a (3) je především možnost pracovat s nepozorovatelnými veličinami, které jsou vypočteny KF.

KF na základě znalosti modelové struktury (rovnice (2) a (3)), modelových parametrů a počátečního stavu, resp. hustoty pravděpodobnosti počátečního stavu $p(\mathbf{x}_0)$, konstruuje rekurzivně odhad stavů $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$ ... $\mathbf{x}_n$. K tomu využívá pouze modelové vstupy a výstupy. Označme jako d množinu informací dostupnou v nějakém čase t, tj. $d_t = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{u}_1, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{u}_t, \mathbf{y}_t\}$. Potom stavová rovnice (2) určuje podmíněnou hustotu pravděpodobnosti $p(\mathbf{x}_t | d_{t-1})$. Nyní předpokládejme, že jsme v čase t a máme data d_{t-1}. Na základě množiny informací d_{t-1} můžeme odhadnout stav $\mathbf{x_t}$. Odhad je dán podmíněnou hustotou pravděpodobnosti $p(\mathbf{x}_t | d_{t-1})$. Je to tzv. apriorní hustota pravděpodobnosti a tento krok KF se nazývá predikční krok. Po změření výstupů a vstupů v čase t máme k dispozici datovou množinu d_t a odhad stavu $\mathbf{x_t}$ můžeme aktualizovat pomocí aposteriorní podmíněné hustoty pravděpodobnosti $p(\mathbf{x}_t | d_t)$. Je to filtrační krok. Tak lze stručně popsat algoritmus KF.[2] KF tak vyžaduje nejenom znalost modelové struktury a modelových parametrů, ale je také značně citlivý na počáteční stav, resp. na hustotu pravděpodobnosti počátečního stavu.

Další výhodou stavového popisu je možnost využít KF pro odhad parametrů proměnných v čase. Parametry chápeme jako nepozorovatelné stavy, jejichž vývoj je determinován stavovou rovnicí. Protože však násobíme stavy mezi sebou, stavový popis je nelineární a k odhadu je nutné použít rozšířený Kalmanův filtr.[3]

Pokud je modelovaný systém bez nepozorovatelných veličin, pak jsou stavy zároveň výstupy a parametry modelu lze odhadnout klasickými ekonometrickými metodami z vnějšího popisu (1). V případě redukovaného systému rovnic je to metodou nejmenších čtverců, která dává nestranné a vydatné odhady parametrů. Jestliže je systém rovnic interdependentní, je nutné použít některou z metod pro odhad simultánního systému rovnic jako například trojstupňovou metodu nejmenších čtverců nebo metodu maximální věrohodnosti s úplnou informací. Tyto odhadové postupy dávají konzistentní a asymptoticky vydatné odhady parametrů. Podrobný popis těchto metod lze nalézt v literatuře – např. (Chow, 1983). Počáteční stav systému je pak skutečným, pozorovaným výstupem.

V případě, že modelová rovnice obsahuje nepozorovanou veličinu v podobě očekávání, lze parametry odhadnout metodou instrumentálních pro-

---

[2] Blíže viz (Hamilton, 1994).
V případě lineárního modelu ve stavovém tvaru a za podmínky normálně rozložených šumů, které mají vlastnosti (6) až (9), dává odhad KF nejlepší odhad ve smyslu minimalizace střední čtvercové chyby. Normálně rozložená náhodná veličina je zcela determinována svou střední hodnotou a variancí. Je tedy možné se při odhadu soustředit pouze na první dva momenty. Jestliže šumy nejsou rozloženy normálně, představuje odhad KF pouze aproximaci stavů prostřednictvím prvních dvou momentů.

[3] Pro nelineární systémy se používá rozšířený KF (*extended Kalman filter*, dále jen EKF). V každém datovém kroku je systém linearizován kolem vypočteného stavu a na takto linearizovaný systém je použit obyčejný KF. Kvalita odhadu pak závisí na kvalitě linearizace.

měnných. Jako počáteční stav pro veličinu očekávání se může vzít skutečná hodnota veličiny v budoucnosti, což znamená přijmutí předpokladu dokonalých očekávání.

Jestliže je tedy modelová struktura lineární a neobsahuje nepozorovatelné veličiny kromě očekávání, lze k odhadu modelu využít klasické a dobře známé ekonometrické odhadové procedury. Modelové rovnice lze pak snadno převést do stavového tvaru a testovat variabilitu parametrů v čase nebo identifikovat veličinu očekávání.

Výše zmíněné metody odhadu parametrů však nelze použít v případech, kdy je model nelineární nebo obsahuje nepozorovatelné proměnné.[4] Metoda prezentovaná v další části, používaná v technické praxi, představuje robustní odhadový postup z hlediska modelové struktury. Lze pomocí ní odhadnout modelové parametry a počáteční stavy jak v případě nelineárních modelů, tak i v případě modelů s nepozorovatelnými veličinami.

Kalmanův filtr a metoda maximální věrohodnosti

Velmi zevrubně lze algoritmus metody maximální věrohodnosti popsat následujícími kroky. Za prvé, model převedeme do stavového tvaru a odhadneme pomocí KF nebo EKF. Výstupy KF jsou použity pro výpočet věrohodnostní funkce stavového modelu, kterou následně maximalizujeme s ohledem na hodnoty parametrů. Pro hledání maxima věrohodnostní funkce jsou použity algoritmy numerické optimalizace.

Uvažujme model ve stavovém tvaru zapsaný rovnicemi (2) a (3), kde bez újmy na obecnosti uvažujeme funkce f a g jako lineární.[5] V tomto případě lze stavový systém zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}\mathbf{u}_t + v_t \tag{4}$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{C}\mathbf{x}_t + \mathbf{D}\mathbf{u}_t + w_t \tag{5}$$

kde matice **A**, **B**, **C**, **D** jsou maticemi parametrů.

Dále předpokládejme, že šumy v a w a počáteční stav $\mathbf{x}_0$ mají následující vlastnosti:

$$E(v_t v_t^T) = \mathbf{Q} \text{ pro } \forall t \tag{6}$$

$$E(w_t w_t^T) = \mathbf{R} \tag{7}$$

$$E(v_t w_t^T) = 0 \tag{8}$$

$$E(\mathbf{x}_0 v_t^T) = 0 \tag{9}$$

Za předpokladu, že známe hodnoty parametrů, dává odhad KF podmíněné hustoty pravděpodobnosti (pro $\forall t$):

[4] Existují metody odhadu pro nelineární systémy ekonometrických rovnic. Jejich použití je však omezeno na určité typy nelinearit.

[5] Podmínka lineárního stavového popisu není nutná. Je použita pouze z důvodu srozumitelnosti výkladu. Celý postup zůstává v platnosti i pro nelineární modely, v nichž je systém linearizován v každém kroku a matice stavového popisu se stávají v čase proměnnými.

$$p(\mathbf{y}_t \,|\, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, d_{t-1}, \mathbf{x}_0, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$$
$$p(\mathbf{x}_t \,|\, \mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1}, d_{t-1}, \mathbf{x}_0, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$$

kde d je množina dostupných informací. Dále lze dokázat, ze za předpokladu normálního rozložení šumů je rozložení vektoru stavů a výstupů podmíněných vstupy a dostupnou množinou informací následující:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_t \,|\, \mathbf{u}_t, \mathbf{x}_t, d_{t-1} \\ \mathbf{x}_t \,|\, \mathbf{u}_t, \mathbf{x}_{t-1}, d_{t-1} \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mathbf{C}\mu_{t|t-1} + \mathbf{D}\mathbf{u}_t \\ \mu_{t|t-1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T\Sigma_{t|t-1}\mathbf{C} + \mathbf{R} & \mathbf{C}^T\Sigma_{t|t-1} \\ \Sigma_{t|t-1}\mathbf{C} & \Sigma_{t|t-1} \end{bmatrix} \right) \tag{10}$$

Přitom $\mu_{t|t-1}$ je odhad střední hodnoty stavu $\mathbf{x}$ v čase t na základě informací v čase t–1 a $\Sigma_{t|t-1}$ pak odhad kovarianční matice stavů v čase t na základě informací v čase t–1.

Metoda maximální věrohodnosti spočívá v maximalizaci věrohodnostní funkce, kterou je podmíněná hustota pravděpodobnosti pozorované náhodné veličiny. Rozložení náhodné veličiny předpokládáme normální. Hustota pravděpodobnosti normálně rozložené náhodné veličiny má podobu exponenciální funkce. Protože logaritmus je monotónně rostoucí funkce, je vhodné maximalizovat logaritmus věrohodnostní funkce.

Odhad KF předpokládá známé numerické hodnoty parametrů v maticích **A**, **B**, **C**, **D** a znalost počátečního stavu $\mathbf{x}_0$. Jestliže některé z hodnot parametrů nebo počáteční stavy neznáme, lze z nich sestavit vektor $\boldsymbol{\theta}$. Stanovme počáteční odhad vektoru neznámých parametrů $\boldsymbol{\theta}^0$. Může to být například, bez újmy na obecnosti, nulový vektor. Odhadněme s parametry ve $\boldsymbol{\theta}^0$ model KF. Potom:

$$\mathbf{y}_t \,|\, \mathbf{x}_t, d_{t-1}, \mathbf{u}_t, \boldsymbol{\theta}^0 \sim N\,(\xi_t\,(\boldsymbol{\theta}^0), P_t(\boldsymbol{\theta}^0)) \tag{11}$$

kde:

$$\xi_t\,(\boldsymbol{\theta}^0) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}^0)\mu_{t|t-1}(\boldsymbol{\theta}^0) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}^0)\mathbf{u}_t \tag{12}$$

$$P_t(\boldsymbol{\theta}^0) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}^0)\Sigma_{t|t-1}(\boldsymbol{\theta}^0)\mathbf{C}^T(\boldsymbol{\theta}^0) + \mathbf{R}(\boldsymbol{\theta}^0) \tag{13}$$

a vypočtěme hodnotu logaritmované věrohodnostní funkce:

$$L = \frac{-n + n^y}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} \log\left|P_t(\boldsymbol{\theta}^0)\right| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} (\mathbf{y}_t - \xi(\boldsymbol{\theta}^0))^T P_t(\boldsymbol{\theta}^0)^{-1} (\mathbf{y}_t - \xi(\boldsymbol{\theta}^0)) \tag{14}$$

kde n je počet pozorování. Pak upravíme vektor neznámých parametrů z $\boldsymbol{\theta}^0$ na $\boldsymbol{\theta}^1$ tak, abychom dosáhli vyšší hodnoty věrohodnostní funkce. Iterační postup pokračuje až do okamžiku nalezení maxima věrohodnostní funkce. Podrobnější popis podává (Aoki,1989) a (De Jong, 1988).

Za účelem maximalizace věrohodnostní funkce je vhodné použít numerické metody optimalizace. Například kvazi Newtonovu metodu. Tyto metody ale vyžadují gradient, tj. derivaci výrazu (14) vzhledem ke každé proměnné ve vektoru $\boldsymbol{\theta}$. Tato derivace může být vypočtena numericky.

Odhad vektoru $\boldsymbol{\theta}$, který maximalizuje věrohodnostní funkci (14), je konzistentní a asymptoticky normální. Podmínky nutné pro to, aby byl vektor $\boldsymbol{\theta}$ identifikovatelný, jsou následující: model musí být identifikovatelný a stabilní, tj. všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ musejí ležet uvnitř jednotkového kruhu.

Běžně se směrodatná odchylka parametrů vyjadřuje jako druhá odmocnina diagonálních členů matice $\left(\frac{1}{n}\right)(\boldsymbol{\Phi})^{-1}$, kde:

$$\boldsymbol{\Phi} = -\frac{1}{n}\frac{\partial^2 L}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}} \tag{15}$$

Druhé parciální derivace L jsou vypočteny numericky diferencováním výrazu (14).

Výhody a nevýhody prezentované metody

Hlavní výhoda metody maximální věrohodnosti spočívá v možnosti odhadu parametrů a počátečních podmínek pro modely ve stavovém tvaru s nepozorovatelnými proměnnými. Metoda je navíc robustní z hlediska modelové struktury, kdy odhadovaný model může být nelineární. Druhou výhodou je možnost snadné restrikce odhadovaných parametrů na základě apriorních informací vycházejících z ekonomické teorie.

Nevýhodou uvedené metody je především nutnost použití numerických metod derivování a numerických metod hledání extrémů. V některých případech mohou být numerické metody hledání extrémů citlivé na zadání počátečního bodu. Navíc nezajišťují nalezení globálního extrému. Proto je vhodné při numerické optimalizaci vyzkoušet několik různých počátečních odhadů $\boldsymbol{\theta}^0$. Další nevýhodou je nutnost běhu KF v každém kroku iteračního postupu hledání extrému, což u rozsáhlých modelů může vést k vyšší časové náročnosti. Navíc v případě nelineárního modelu jsou výsledky odhadu EKF závislé na kvalitě linearizace a výsledky jsou tedy pouze aproximativní. Tento problém je však pro některé typy nelinearit řešitelný.

Model otevřené ekonomiky

Model prezentovaný v této části je malý diskrétní model otevřené ekonomiky. Při jeho odvození vycházíme z následujících předpokladů:
– jediným cílem monetární politiky je dlouhodobá cenová stabilita;
– peníze jsou v dlouhém časovém horizontu neutrální;
– jedná se o otevřenou ekonomiku s plovoucím kurzem;
– endogenní změny množství kapitálu jsou zanedbávány;
– očekávání mají adaptivní podobu;
– monetární politika je chápána jako implementace monetárního pravidla.

Model je z důvodu jednoduchosti uvažován ve tvaru několika rovnic; přesto postihuje klíčové vazby pro analýzu monetární transmise a účinků monetárních zásahů. Model je konzistentní s chováním subjektů na mikroekonomické úrovni. Odvození modelových rovnic vychází z přístupu, kdy ve funkci užitečnosti ekonomických subjektů vystupuje přímo reálně držené množství peněz (*money in utility function*). Výsledný model je pak vztažením dynamické optimalizace racionálně jednajících subjektů, které maximalizují svou funkci užitečnosti, na makroúroveň. Z důvodu rozsahu textu se dále soustředíme pouze na výsledný analytický tvar. Podrobnější popis principů odvození lze nalézt v pracích (Walsh, 1998), (McCallum – Nelson, 1997), (Rotemberg – Woodford, 1997).

Výsledný model má následujíc tvar:

$$y_t = a_0 + a_1(i_t - E_t\pi_{t+1}) + a_2E_t y_{t+1} + a_3(s_t - p_t + p_t^*) + \varepsilon_{1t} \tag{16}$$

$$\pi_t = q_1E_t\pi_{t+1} + q_2(y_t + y_{t+1}) + (1 - q_1)(\Delta s_t + \Delta p_t^*) + \varepsilon_{2t} \tag{17}$$

$$s_t = E_t s_{t+1} + i_t - i_t^* + prem_t + \varepsilon_{3t} \tag{18}$$

$$i_t = c(E_t\pi_{t+j} - \pi^{target}) \tag{19}$$

Malá písmena, kromě úrokové sazby, označují logaritmy. Rovnice (16) je rovnicí agregátní poptávky, kde y_t je sezonně očištěný, reálný hrubý domácí produkt, i_t je nominální krátkodobá úroková míra[6], s_t nominální měnový kurz, p_t je domácí cenová hladina, p_t^* je cenová hladina referenční zahraniční ekonomiky. Agregátní poptávka, rovnice (16), závisí negativně na reálné ex ante úrokové míře, pozitivně na očekávaném vývoji domácího výstupu a vzhledem k otevřenosti ekonomiky pozitivně na reálném měnovém kurzu. Symbolem E jsou v popisu modelových rovnic značena očekávání veličin. Aby byl model co nejjednodušší, neobjevují se v rovnici poptávky vládní výdaje, které by mohly výrazným způsobem přispívat k analýze. Rovnice agregátní poptávky je odvozena za předpokladu, že funkce užitečnosti je aditivně separabilní a není zde možný Pigouův efekt.

Rovnice (17) je rovnicí agregátní nabídky. Agregátní nabídka má Calvoovu podobu. Její odvození vychází z předpokladu monopolistické konkurence na trhu, kdy firma bude moci změnit svou cenu v každém období s pravděpodobností q. Přitom se snaží, aby odchylka ceny od optimální ceny byla co nejmenší. Optimální cena je pak závislá na agregátní cenové hladině a zohledňuje pozici ekonomiky v hospodářském cyklu. Původní specifikace (Walsh, 1998) je modifikována do podoby zohledňující otevřenost ekonomiky, která se projevuje prostřednictvím vlivu změny kurzu a cenové hladiny v referenční zemi na inflaci v domácí ekonomice označenou symbolem π. Rovnice nabídky je navíc lineárně homogenní, což znamená, že inflace je v dlouhém období nezávislá na výstupu. Rovnice tak reflektuje skutečnost, že monetární zásahy mají reálný efekt pouze v krátkém časovém období. V dlouhém období je křivka nabídky vertikální.

[6] Na spotřebitelské chování má vliv spíše dlouhodobá úroková míra. Krátkodobá úroková míra vystupující v monetárním pravidle je zařazena do rovnice agregátní poptávky z důvodu snahy o co největší jednoduchost modelu.

Rovnice (18) doplňuje modelovou strukturu o kurzovou rovnici v podobě nekryté úrokové parity. Očekávaná změna kurzu je rovna rozdílu domácích a zahraničních nominálních úrokových sazeb a proměnné *prem,* jež je rizikovou prémií. Náhodná složka mající charakter bílého šumu zachycuje šoky v zahraniční úrokové míře a krátkodobé odchylky od této parity. Stejně jako v rovnici agregátní poptávky jsou zde z důvodu zjednodušení použity krátkodobé úrokové míry.

Rovnice (19) je jednoduchým monetárním pravidlem s vazbou na předpověď budoucí inflace – *inflation based forecast rule* (IFB). Tato strategie v podobě řízení nominální krátkodobé úrokové míry pomocí pravidla IFB je podobná monetární strategii cílování inflace. Parametr c je parametrem monetární politiky. Čím bude jeho hodnota vyšší, tím agresivněji bude monetární autorita reagovat na odchylky inflačních očekávání od cílované hodnoty π^{target}. Pravidlo IFB může být samozřejmě modifikováno do jiného tvaru tak, abychom dosáhli nejen určitého inflačního cíle, ale také jistého stupně vyhlazení úrokové míry. Výhodou výše uvedeného pravidla je pak jednoduchost a robustnost v případě nejistoty o modelové struktuře.

Pro odhad modelových parametrů na makroekonomických datech české ekonomiky byl model přepsán do tvaru:

$$y_t = a_0 + a_1(i_t - E_t\pi_{t+1}) + a_2 y_{t-1} + a_3(s_t - p_t + p_t^*) + \varepsilon_{1t} \tag{20}$$

$$\pi_t = q_1 E_t\pi_{t+1} + q_2(y_t + y_{t-1}) + (1 - q_1)(\Delta s_t + \Delta p_t^*) + \varepsilon_{2t} \tag{21}$$

Z modelu byla vypuštěno monetární pravidlo, které nelze odhadovat. Úrokové pravidlo (19) je využíváno při modelových simulacích a odhadu impulzních a skokových odezev. Podobně je tomu i u rovnice nekryté úrokové parity. Z důvodu krátkosti časových řad a z toho plynoucího nedostatku informací bylo z modelu odstraněno očekávání budoucího vývoje výstupu $E_t y_{t+1}$ a nahrazeno zpožděným výstupem y_{t-1}. Inflační očekávání jsou brána jako adaptivní, tj.:

$$E_t\pi_{t+1} = E_{t-1}\pi_t + \lambda(\pi_t - E_{t-1}\pi_t) \tag{22}$$

Adaptivní očekávání byla zvolena zejména pro svou jednoduchost a také proto, že se nedomníváme, že by subjekty měly za tak krátké období transformace dostatek zkušeností na to, aby jejich očekávání byla racionální, tj. v průměru správná. Pravděpodobně adekvátnější pro specifikaci inflačních očekávání by byla blízce racionální očekávání nebo nějaká podoba učících se očekávání, která by reflektovala získávání zkušeností ekonomickými subjekty ohledně tvorby očekávání ekonomických ukazatelů.

Model popsaný rovnicemi (20) až (22) byl odhadnut na českých datech metodou maximální věrohodnosti, která využívá výstupy Kalmanova filtru. Výstupem je sezonně očištěný hrubý reálný domácí produkt měřený ve stálých cenách roku 1995 a čistá inflace, kterou je inflace indexu CPI po očištění o vliv regulovaných cen. Domácí krátkodobou sazbou je tříměsíční PRIBOR. Za referenční zahraniční ekonomiku bylo zvoleno – vzhledem k struktuře našeho zahraničního obchodu – Německo. Měnový kurz vy-

TABULKA 1

rovnice	parametr	odhad	std.
(20)	a_0	0,0773	0,0118
(20)	a_1	0,9752	0,0041
(20)	a_2	–0,5401	0,0057
(20)	a_3	0,0265	0,0081
(21)	q_1	0,9677	0,0051
(21)	q_2	0,0865	0,0163
(22)	λ	0,7853	0,0102

stupující v modelu je tedy kurzem CZK/DEM a krátká zahraniční sazba je tříměsíční EURIBOR. K odhadu byly použity čtvrtletní časové řady od prvního čtvrtletí 1995 do třetího čtvrtletí 2001. Výsledky odhadu jsou uvedeny v *tabulce 1.*

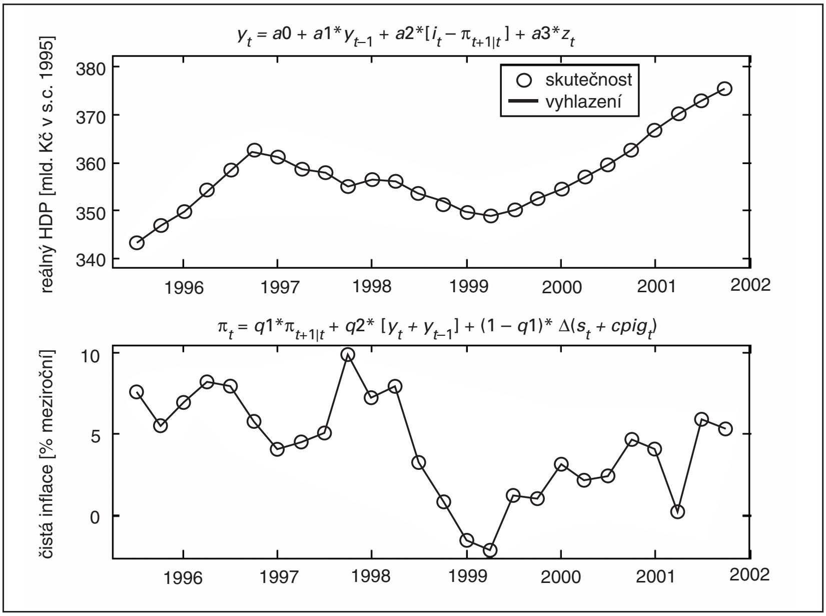
Jak je patrné z výsledků, i bez použití restrikcí na parametry odpovídají znaménka ekonomické teorii. Navíc jsou všechny parametry statisticky významné a parametr λ je menší než jedna. Volbou adaptivních očekávání byl ještě před odhadem stanoven způsob jejich tvorby, který samozřejmě ovlivní odhad parametrů. Patrně nejvhodnější by byla specifikace tvorby očekávání ve formě učícího se procesu, kdy by se ekonomické subjekty učily na základě svého minulého jednání a učící se proces by za jistých předpokladů konvergoval k racionálním očekáváním.

Výraznějším problémem je ale velmi vysoká setrvačnost modelových rovnic vyplývající z odhadnutých hodnot parametrů a_2 a q_1, které jsou blízké jedné. To naznačuje pravděpodobnou nestacionaritu časové řady výstupu, která by mohla být integrovaným procesem prvního řádu. Bylo by tedy vhodné pomocí prvních diferencí řadu výstupu stacionarizovat a model odhadovat v transformované podobě. Z ekonomické teorie však vyplývá, že výstup má dvě složky, a to potenciální produkt, který je trendovou veličinou, a mezeru výstupu, která je zcela jistě stacionárním procesem. Transformace řady pomocí diferencí by tak vedla ke zkreslení informace obsažené v časové řadě. Jako nejvhodnější se tedy jeví taková změna modelového konceptu, ve které budou veličiny vystupovat v podobě odchylek od rovnováhy.

Odhady parametrů metodou maximální věrohodnosti byly použity jako počáteční hodnoty pro identifikaci v čase proměnných parametrů, jejichž vývoj může indikovat nestabilní nebo nevýznamné modelové parametry. Výsledky odhadu v podobě modelových výstupů jsou uvedeny v *grafu 1.* V *grafu 2* jsou uvedeny vyhlazené odhady v čase proměnných parametrů spolu s intervaly spolehlivosti. Z výsledků je patrné, že odhadované parametry jsou poměrně stabilní a všechny parametry jsou statisticky významné.

Z odhadnutého modelového konceptu vyplývá, že relativně velkou roli hraje v poptávkové funkci úroková míra. Vliv kurzových změn na agregátní poptávku je relativně malý. Inflaci pak ovlivňují zejména očekávání. Vliv změny produktu je zde relativně malý. Časová řada změn výstupu totiž nevyjadřuje pouze pozici v ekonomickém cyklu, ale také růst potenciálního produktu, jenž je samozřejmě neinflační. Změna odchylky skuteč-

GRAF 1 Výstupy odhadovaných rovnic



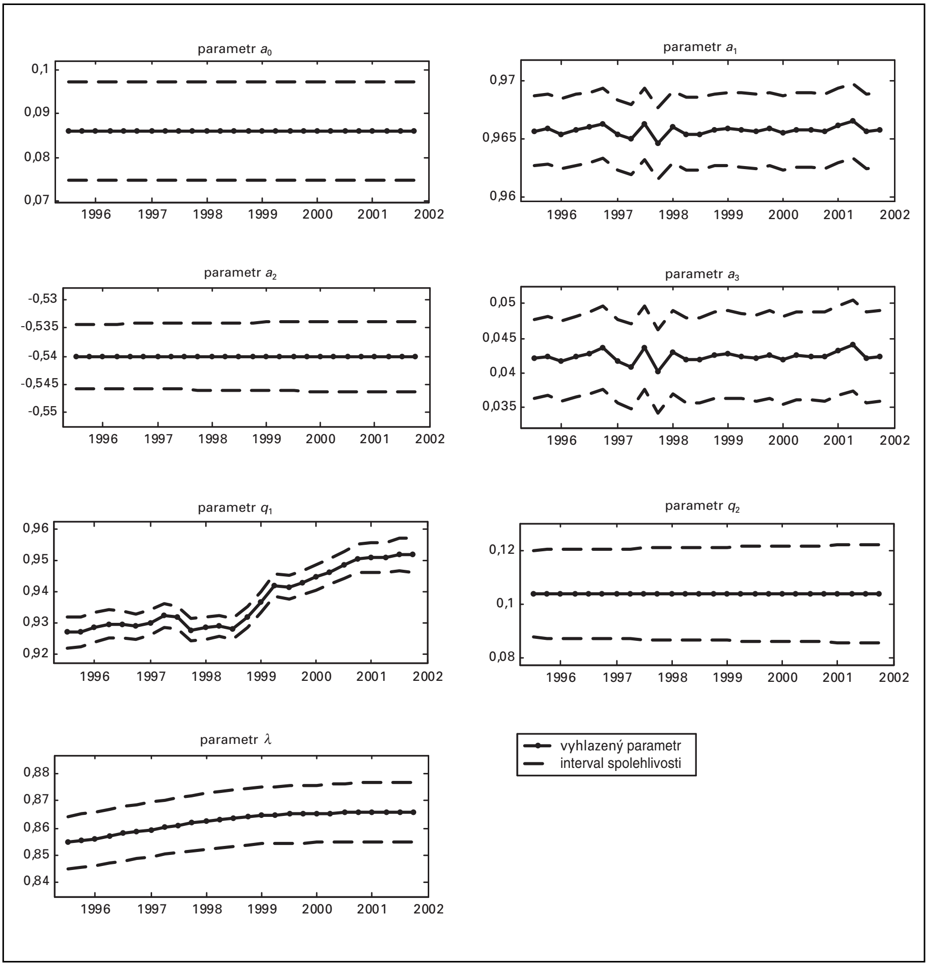
ného produktu od potenciálu, která působí na inflaci, představuje v absolutním vyjádření jen malou část informace v časové řadě celkového produktu, a tak je parametr q_2 podle předpokladu poměrně malý. Vliv kurzových změn a změn v zahraniční cenové hladině je nízký.

Simulace skokových a impulzních odezev modelu daného rovnicemi (17) až (20) vedla k potvrzení již zmíněné obavy z vysoké setrvačnosti modelu. Reakce na impulzy a šoky je v porovnání s realitou dlouhá bez ohledu na zvolenou hodnotu parametru c v reakční funkci banky. Je způsobena především hodnotou autoregresního parametru u rovnice agregátní poptávky. Dále se do charakteru odezev promítá způsob tvorby očekávání a nízká citlivost modelových výstupů na změny měnového kurzu vyvolané pohybem úrokové sazby.

Závěr

Text se zabýval problematikou odhadu parametrů a počátečních podmínek pro modely ve stavovém tvaru. Jak bylo v textu zdůvodněno, stavový popis poskytuje možnost pracovat jak s proměnnými parametry, tak především s nepozorovatelnými veličinami. Byla diskutována vhodnost jednotlivých odhadových metod pro odhad parametrů ve stavových modelech, přičemž blíže a podrobněji byla prezentována metoda maximální věrohodnosti, která využívá výstupů Kalmanova filtru a je robustní jak z hlediska modelové struktury, tak z hlediska odhadu modelu s nepozorovatelnými veličinami. Ve druhé části textu byl prezentován malý monetární model otevřené ekonomiky s adaptivními očekáváními. Model vychází z mikroe-

GRAF 2 Vyhlazené parametry s intervaly spolehlivosti



konomických základů a je odhadnut na českých datech prezentovanou metodou. Jak naznačují výsledky, budou pravděpodobně nutné některé modelové změny. Především se to týká modelové specifikace ve smyslu konstrukce modelu, v němž budou vystupovat místo konkrétních úrovní výstupu, úrokových měr a kurzu odchylky od jejich rovnovážných hodnot. Vhodná by byla patrně i změna způsobu tvorby očekávání.

LITERATURA

AOKI, M. (1989): *Optimization of Stochastic Systems Topics in Discrete Time Dynamics*. San Diego, Academic Press, 1989.

CHOW, C. G. (1983): *Econometric*. McGraw–Hill, 1983, ISBN 0–07–066223–1.

HAMILTON, J. D. (1994): State-Space models. In: *Handbook of Econometrics*, Elsevier Science, N.Y., 1994.

HAVLENA,V. – ŠTECHA, J. (1994): *Moderní teorie řízení.* Praha, ČVUT, 1994.

HAVLENA,V. – ŠTECHA, J. (1993): *Teorie dynamických systémů*. Praha, ČVUT, 1993.

JONG, P. de (1988): The likelihood for a State-Space model. *Biometrica*, vol. 75, 1988, pp. 165–169.

McCALLUM, B. T. – NELSON, E. (1997): An Optimizing IS-LM Specification for Monetary Policy and Business Cycle Analysis. *NBER Working Paper*, no. 5875, 1997.

ROTEMBERG, J. J. – WOODFORD, M. (1997): An Optimization-Based Econometric framework for the Evaluation of monetary policy. *NBER Working Paper*, no. T02233, 1997.

WALSH, C. E. (1998): *Monetary Policy and Theory*. Massachusetts Institute of Technology, 1998, ISBN 0-262-23199-9.

SUMMARY

JEL Classification: C51, E5
Keywords: state-space form – maximum likelihood – Kalman filter

Estimation Methods In the State Space Form

Jan VLČEK – Česká národní banka (jan.vlcek@cnb.cz)

The paper demonstrates estimation methods for parameters and initial states of models in the state space form. Special attention is devoted to the maximum-likelihood method using the Kalman filter for likelihood function computation. The method is relative simple and is practical in estimating the parameters and initial states of models in state-space form. In the second part of the paper this method is used for a parameter estimation of a small open economy model. The model is grounded in microeconomic foundations and the estimates as per the prezented method are derived from the Czech Republic's data sets.